PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Les quatre parties du problème sont largement indépendantes

I

f est une fonction numérique définie sur $\mathfrak{d} = [0, 1]$

1° Démontrer qu'il existe une intégrale particulière sur $\mathfrak{d}$ de l'équation différentielle :

$$y'' + f(x) = 0$$

satisfaisant aux conditions : $y(0) = 0$; $y(1) = 0$, et qu'elle est unique $\left(\text{on pourra poser } \int_0^x f(\xi)d\xi = F(x)\right)$.

2° Donner de cette intégrale particulière une expression de la forme :

$$y(x) = \int_0^x G_1(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^1 G_2(x, \xi) f(\xi) d\xi ,$$

qui peut encore s'écrire :

$$y(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

où G est la fonction numérique définie sur le « carré » $\mathfrak{d} \times \mathfrak{d}$ de $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= G_1(x, \xi) \qquad \forall (x, \xi) : x \geqslant \xi \\ &= G_2(x, \xi) \qquad \forall (x, \xi) : x \leqslant \xi \end{aligned}$$

II

u étant un réel donné, $u \in]0, 1[$ et ε un autre réel tel que

$$[u - \varepsilon , u + \varepsilon] \subseteq \mathfrak{d} ,$$

f est la fonction numérique définie sur $\mathfrak{d}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 , \ \forall x \in [0, u - \varepsilon] \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} , \ \forall x \in]u - \varepsilon , u + \varepsilon[\\ &= 0 , \ \forall x \in [u + \varepsilon , 1] \end{aligned}$$

1° Calculer

$$y_\varepsilon(x) = \int_0^x \xi(1 - x) f(\xi) d\xi + \int_x^1 x(1 - \xi) f(\xi) d\xi$$

dans les trois cas suivants :

$$x \in [0, u - \varepsilon] \ ; \qquad x \in]u - \varepsilon, u + \varepsilon[\ ; \qquad x \in [u + \varepsilon, 1]$$

2° La fonction y_ε ainsi définie sur $\mathfrak{d}$ est-elle continue? est-elle dérivable sur $\mathfrak{d}$? Est-ce une intégrale sur $\mathfrak{d}$ de l'équation différentielle :

$$y'' + f(x) = 0 \ ?$$

La réponse à cette dernière question est-elle en contradiction avec les résultats du I?

3° Pour tout $x \in \mathfrak{d}$, calculer la limite $y_0(x)$ de $y_\varepsilon(x)$ lorsque ε tend vers 0. (On discutera suivant les valeurs de x.) La fonction y_0 ainsi définie est-elle continue sur $\mathfrak{d}$? Est-elle dérivable sur $\mathfrak{d}$?

III

1° Trouver, pour tout $u \in]0, 1[$, une fonction g_u de la variable réelle x, définie sur $\mathfrak{d}$, et satisfaisant aux conditions suivantes :

a. g_u est continue sur $\mathfrak{d}$, et telle que $g_u(0) = g_u(1) = 0$

b. g_u est intégrale de l'équation différentielle :

$$y'' = 0$$

sur chacun des deux intervalles semi-ouverts $[0, u[$ et $]u, 1]$.

c. La fonction dérivée g_u' admet au point $x = u$ une limite à droite $g_u'(u + 0)$ et une limite à gauche $g_u'(u - 0)$ telles que

$$g_u'(u - 0) - g_u'(u + 0) = 1$$

2° Montrer qu'une telle fonction est unique.

3° La fonction g_u a-t-elle des rapports avec les fonctions déjà étudiées dans les parties I et II?

IV

Dans cette partie, $C(\mathfrak{I})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions numériques définies et continues sur $\mathfrak{I}$, et par $C_2(\mathfrak{I})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathfrak{I})$ dont les éléments sont les fonctions qui admettent une dérivée seconde continue sur $\mathfrak{I}$.

1° (a_{11}, a_{12}) et (a_{21}, a_{22}) étant deux points de $\mathbf{R}^2$ différents de $(0, 0)$, on appelle $C_{2,L}(\mathfrak{I})$ le sous-ensemble de $C_2(\mathfrak{I})$ satisfaisant aux conditions (L) :

$$\text{(L)} \qquad \begin{cases} a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) = 0 \\ a_{21}y(1) + a_{22}y'(1) = 0 \end{cases}$$

Est-ce un sous-espace vectoriel de $C_2(\mathfrak{I})$?

2° Ω est l'homomorphisme de $C_2(\mathfrak{I})$ dans $C(\mathfrak{I})$ associant à toute fonction $y \in C_2(\mathfrak{I})$ la fonction Ωy définie par :

$$\Omega y(x) = p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x) , \qquad \forall x \in \mathfrak{I} ,$$

où p est une fonction continûment dérivable et q une fonction continue sur $\mathfrak{I}$, la fonction p ne s'annulant pas sur $\mathfrak{I}$. Ω_L est la restriction de Ω à $C_{2,L}(\mathfrak{I})$.

Dans la suite du problème, nous ferons l'hypothèse que le noyau de Ω_L a pour seul élément la fonction nulle sur $\mathfrak{I}$. Dans le cas particulier où $\Omega y = y''$, à quelle condition doivent satisfaire les coefficients a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} pour qu'il en soit ainsi?

Revenant au cas général, montrer que si y_1 et y_2 sont deux éléments du noyau de Ω, y_1 satisfaisant à la 1re et y_2 à la 2e des conditions L, ils sont linéairement indépendants.

3° On suppose qu'il existe un couple (y_1, y_2) d'éléments du noyau de Ω satisfaisant à la condition (A) :

$$\text{(A)} \qquad \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \forall x \in \mathfrak{I}.$$

Montrer que y_1 et y_2 sont linéairement indépendants et que la valeur du produit $p(x)[y_1'(x)y_2(x) - y_2'(x)y_1(x)]$ est indépendante de x (et différente de 0).

4° λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 désignant quatre constantes telles que

$$\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 \neq 0,$$

montrer que si le couple de fonctions (y_1, y_2) satisfait à la condition (A), il en est de même du couple (Y_1, Y_2) défini par :

$$Y_1 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \quad ; \qquad Y_2 = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2.$$

Montrer qu'il est possible de déterminer λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 pour que Y_1 satisfasse à la première des conditions (L), Y_2 à la seconde et que l'on ait :

$$p(x)[Y_1'(x)Y_2(x) - Y_2'(x)Y_1(x)] = 1 \quad , \qquad \forall x \in \mathfrak{I}.$$

5° Y_1 et Y_2 désignant les fonctions calculées au 4° et u un réel donné, $u \in]0, 1[$, calculer alors les valeurs à donner aux constantes C_1 et C_2 pour que la fonction g_u, définie sur $\mathfrak{I}$ par :

$$\begin{aligned} g_u(x) &= C_1Y_1(x) \qquad \forall x \in [0, u] \\ &= C_2Y_2(x) \qquad \forall x \in [u, 1], \end{aligned}$$

soit continue sur $\mathfrak{I}$, la fonction dérivée (g_u') admettant au point $x = u$ une limite à droite $g_u'(u + 0)$ et une limite à gauche $g_u'(u - 0)$ telles que :

$$g_u'(u - 0) - g_u'(u + 0) = \frac{1}{p(u)}.$$

6° On désigne par G la fonction numérique continue sur le carré $\mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$ de $\mathbf{R}^2$, définie par :

$$G(x, u) = g_u(x) \qquad \forall (x, u) \in \mathfrak{I} \times]0, 1[$$

Montrer que, pour toute fonction $f \in C(\mathfrak{I})$, l'unique intégrale particulière sur $\mathfrak{I}$ de l'équation différentielle :

$$\Omega y + f = 0$$

qui satisfasse aux conditions (L) est la fonction y définie par :

$$y(x) = \int_0^1 G(x, \xi)f(\xi)\,d\xi .$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail